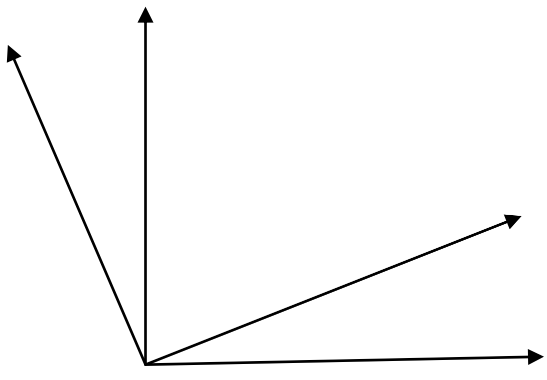
Вращения твердых тел

1. Группа вращений твердого тела с закрепленной осью: O(2).
2. Группа вращений твердого тела с закрепленной точкой: O(3).
3. Основные формулы тригонометрии.
4. Существование неподвижной прямой у любого вращения.

Представьте себе твердое тело с закрепленной осью, например, ручка радиоприемника. Вы можете вращать ручку в одну или другую сторону, и это вращение определяется одним параметром: угол. Труднее представить себе тело с закрепленной точкой. Иногда такие тела встречаются в автомобиле: рычаги на шаровом шарнире. Для описания вращения твердого тела с закрепленной точкой недостаточно одного параметра, но можно ввести несколько углов, а именно 3, называемых углами Эйлера, которые однозначно определяют вращение. Но мы хотим иметь универсальный способ математического описания любого вращения, пригодный для любой размерности. И мы хотим, в этом способе видеть групповую структуру. Такой способ нам дают матрицы.

На следующем рисунке схематично изображен поворот тела с закрепленной осью на некоторый угол:



На рисунке видно, что при повороте точка $\binom{1}{0}$ переходит в точку $\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$, а точка $\binom{0}{1}$ переходит в точку $\binom{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Введем обозначение для преобразования: для любой точки $\binom{x}{y}$ ее образ при повороте обозначим через $A\binom{x}{y}$. Таким образом для поворота тела на угол α мы будем иметь:

$$A\binom{1}{0}=\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \text{ и } A\binom{0}{1}=\binom{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Наглядно очевидно, что если заданы образы точек $\binom{1}{0}$ и $\binom{0}{1}$, то образы всех остальных точек тоже однозначно определены. Но я хочу это формально доказать короткой выкладкой потому, что в этой выкладке нам посчастливиться воспользоваться еще одним важнейшим понятием математики, понятием линейности. Итак:

Преобразование A называется линейным, если для любых двух точек (или столбцов) X, Y и любого числа a

$$A(X + Y) = A(X) + A(Y),\ A(aX) = aA(X)$$

Поворот твердого тела представляет собой линейное преобразование. Пусть нам заданы значения $A\binom{1}{0}=\binom{a}{b}$ и $A\binom{0}{1}=\binom{c}{d}$. Тогда мы можем вычислить значение $A\binom{x}{y}$ для любого столбца (точки) $\binom{x}{y}$. В самом деле:

$$\binom{x}{y} = x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}$$

Поэтому $A\binom{x}{y} = A(x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1})$ последнее в силу линейности равно

$$x\,A\binom{1}{0} + y\,A\binom{0}{1} = x\binom{a}{b} + y\binom{c}{d} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

Такая таблица в скобках $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного преобразования A. Если мы знаем матрицу линейного преобразования, то с ее помощью легко можем вычислить куда перейдет любая точка при этом преобразовании, для этого надо просто умножить матрицу на столбец.

А как перемножить две матрицы?

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & ag+ch \\ be+df & bg+dh \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц соответствует композиции линейных преобразований. Относительно умножения некоторые классы матриц образуют группу, впрочем, тут имеет смысл сделать паузу и отдельно обсудить, что такое группа?

Группой называется множество G, в котором определена операция «умножения», т.е. для каждых двух элементов g, h множества G определено их «произведение» gh, такое что:

1. Имеет место ассоциативность (gh)f = g(hf)
2. В множестве G имеется особый элемент e, называемый «единицей», для которого eg = ge = g, каким бы ни был элемент g.
3. Для каждого элемента g существует обратный элемент g^{-1}, т.е. такой, что $g*g^{-1}=e$

Примеры:

1. Целые числа образуют группу относительно сложения
2. Рациональные или вещественные числа относительно умножения? Да или нет?
3. Вращения тела с закрепленной осью: окружность

Все эти группы коммутативны (или, как еще говорят абелевы). Группа вращений трехмерного пространства не коммутативна.

Что является «единицей» среди матриц? Это матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы уже видели, что матрица поворота плоскости на угол α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Если мы последовательно совершим два поворота плоскости сначала на угол α, а затем на угол β то в результате получим поворот на угол α+β. Это значит, что

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Перемножая матрицы в левой части и приравнивая каждый элемент матриц в правой и левой частях получаем основные формулы тригонометрии:

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)\,sin(\beta)$$

$$sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)\,sin(\beta)$$

В отличие от принятого в школе доказательства этих формул приведенное доказательство основано на сравнении двух реализаций групповой структуры на окружности.

Интересно, знаете ли Вы другой способ доказательства этих формул?

Ортогональность преобразования А означает, что преобразование А не меняет расстояния между точками. Другими словами, если обозначить через ρ(x,y)

расстояние между точками x и y, то ρ(A(x),A(y)) = ρ(x,y).

Интересно вот, что: если мы транспонируем матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

то получим обратную ей. В самом деле:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом матрица А поворота на угол α обладает свойством

$$A * A^t = E$$

Перейдем теперь к вращениям трехмерного пространства, т.е. твердого тела с закрепленной точкой. В трехмерном пространстве зададим ортогональную систему координат. По аналогии с двумерным случаем матрицей поворота А называется матрица 3 х 3, в которой столбцы есть образы при повороте А базисных векторов.

Метрикой в произвольном пространстве называется функция расстояния ρ(x,y) двух переменных, для которой выполнены некоторые простейшие свойства, главное из которых неравенство треугольника:

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

Но в отличие от произвольных пространств в линейной алгебре метрикой считают скалярное произведение

$$\lambda(\underline{a}, \underline{b})$$

Скалярное произведение двух векторов является числом. Выполняются некоторые свойства, которые я не буду перечислять, кроме двух:

$$\lambda(\underline{a}, \underline{b}) = 0$$

тогда и только тогда, когда векторы $\underline{a}$, $\underline{b}$ перпендикулярны, и

$$\lambda(\underline{a}, \underline{a})$$

равно квадрату длины вектора $\underline{a}$.

Для нашего конкретного случая, т.е. для пространства R^2 или R^3 скалярное произведение двух векторов, это просто сумма произведений координат, которую удобно записать в виде произведения двух таких матриц:

$$(a, b, c) \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = ax + by + cz$$

Поскольку векторы $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ имеют длину 1 и все между собой попарно ортогональны, то такими же должны быть и векторы $A \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, $A \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ и $A \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$, следовательно столбцы матрицы поворота A должны быть попарно ортогональны и иметь длину 1. Это означает, что

$$A * A^t = E$$

Обратно: любая матрица А, которая обратна своей транспонированой, задает ортогональное преобразование. Таким образом, мы получаем два разных описания одной и той же группы: геометрическое и алгебраическое.

Мы получили полное описание группы ортогональных (т.е. сохраняющих расстояние между точками) преобразований пространства R^3. Пусть G и H – две группы. Гомоморфизмом $f : G \dashrightarrow H$ называется такое отображение, для которого $f(g_1g_2) = f(g_1)\, f(g_2)$ и $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$. Иными словами, гомоморфизм – это отображение одной группы в другую, при котором операция умножения «сохраняется». Если гомоморфизм двух групп является еще к тому же взамно-однозначным отображением, то он называется изоморфизмом.

Фактически мы пришли к следующему: группа ортогональных преобразований пространства R^3 изоморфна группе матриц 3 х 3, которые обратны своей транспонированной.

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Пусть А – произвольное вращение пространства R^3. Существует ли ненулевой вектор $\underline{x}$, для которого $A(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$ для некоторого числа λ ? Такой вектор существует, если определитель матрицы

$$\begin{matrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{matrix}$$

равен нулю. Но этот определитель является многочленом 3 степени по λ, а уравнение 3 степени всегда имеет корень. Таким образом существует λ и существует ненулевой вектор $\underline{x}$, для которых $A(\underline{x}) = \lambda*\underline{x}$. Но поворот А сохраняет длины векторов, поэтому длина вектора $A(\underline{x})$ равна длине вектора $\underline{x}$, следовательно λ может быть только либо 1 либо -1.