Линейная алгебра

Линейная алгебра – очень простая область математики, которую естественно было бы изучать в средней школе, нежели в вузе. В то же время она пронизывает почти всю математику и физику, хотя это не всегда заметно, т.к. специалисты разных областей математики и физики используют разную терминологию для обозначения понятий линейной алгебры. Физики, например, вообще называют линейную алгебру тензорным анализом, и не сразу поймешь, что это одно и то же. Область математики, называемая функциональным анализом, является не чем иным, как линейной алгеброй бесконечного числа измерений. На понятии линейного пространства бесконечного числа измерений основана квантовая физика. Многообразие языков, которые используются при использовании линейной алгебры в разных областях науки, конечно, затрудняет понимание: к трудностям понимания самого материала прибавляются еще и языковые трудности. Впрочем, с языковыми трудностями мы вообще привыкли сталкиваться в жизни и не только в математике: нам всем намного легче было бы жить, если бы все люди на Земле говорили на одном языке, например, грузинском.

Линейная алгебра – наука очень маленькая и простая, поэтому существует очень мало учебников по линейной алгебре, обычно линейная алгебра излагается в любом курсе алгебры, как один из разделов курса. Самым известным учебником по линейной алгебре является блистательная книга И.М.Гельфанда, написанная в 1948 году и переизданная с тех пор 5 раз.

Понятие поля и линейного (или векторного) пространства.

Полем называется множество, в котором заданы две операции: сложение и умножение. При этом выполнены обычные свойства: коммутативность, ассоциативность обеих операций, а также дистрибутивность. Имеются 0 и 1. По сложению у каждого элемента есть обратный, а по умножению: у каждого кроме 0.

Примеры.

1. Вещественные числа R образуют поле.
2. Рациональные числа Q образуют поле.

3. Целые числа Z не образуют поля, т.к. не у всех целых числе есть обратное.
4. Целые вычеты Z/pZ по модулю простого числа p образуют поле. Например, множество из двух чисел 0 и 1 образуют поле, если задать операции как в вычетах.
5. Комплексные числа C образуют поле.

Линейным или *векторным пространством над полем* F называется множество V с операцией сложения

$$x + y \in V, \text{ если } x, y \in V$$

и умножения на элементы поля F

$$\lambda x \in V, \text{ если } x \in V \text{ и } \lambda \in F.$$

Эти две операции называются *операциями линейности*

Самый распространенный пример векторного пространства над любым полем, это множество столбцов определенной длины (или высоты).

Над каким бы полем мы не рассматривали векторное пространство, наглядный материал всегда мы черпаем из 2- или 3-х мерного пространства над полем вещественных чисел. Поэтому в нынешнем моем изложении я вообще не буду упоминать, какое поле я имею ввиду, но почти все, что я буду говорить сегодня в силе для любого поля, хотя для наглядности стоит представлять себе в качестве поля поле вещественных чисел.

Пусть V, U – два линейных пространства. Отображение

$$f: V \dashrightarrow U$$

называется линейным отображением, если

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Если линейное отображение $f: V \dashrightarrow U$ еще и является взаимно-однозначным отображением (биекцией), то оно называется *изоморфизмом* двух линейных пространств.

Линейная независимость. Базис. Размерность.

Пусть в пространстве V задано конечное множество векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется *линейной комбинацией* этих векторов.

Конечное множество $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторов называется *линейно независимым*, если для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть хотя бы одно ненулевое,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \neq 0$$

Если набор векторов линейно зависим, то какой-то из векторов набора линейно выражается через остальные (тот, при котором коэффициент ненулевой). Можно добавлять к линейно независимому набору вектора, которые линейно не выражаются через уже имеющиеся в наборе, тогда при каждом добавлении снова будем получать линейно независимый набор векторов. Этот процесс может продолжаться бесконечно, а может случиться, что на каком-то этапе окажется, что таких векторов, которые не выражаются через имеющиеся нет. В этом последнем случае мы получим линейно независимый набор векторов, через который ВСЕ остальные вектора векторного пространства выражаются линейно. Такой набор векторов называется *базисом*, а пространство в этом случае называется *конечномерным*.

Если в конечномерном векторном пространстве задан базис, то каждый вектор этого пространства единственным образом линейно выражается через вектора базиса. Таким образом, мы получаем взаимно-однозначное соответствие между столбцами и векторами. Очевидно, что это взаимно-однозначное соответствие перестановочно с операциями линейности, т.е. является изоморфизмом векторных пространств.

Фактически мы доказали следующую теорему:

Теорема. Каждое конечномерное векторное пространство изоморфно пространству столбцов некоторой длины.

Этого недостаточно для полной классификации конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма: требуется еще проверить:

1. Могут ли два пространства столбцов разной длины быть изоморфны между собой?
2. Иначе говоря: может ли в векторном пространстве быть два базиса разной длины?

Теорема. В пространстве R^n любой набор векторов, в количестве большем n, является линейно зависимым.

Доказательство по индукции. При n = 1 утверждение теоремы очевидно. Допустим, что утверждение верно для R^{n-1}. Предположим, что у нас имеется линейно независимый набор векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в пространстве R^n. Требуется доказать, что $k \le n$.

Определение. Элементарным преобразованием конечного набора векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется такое изменение набора, при котором один из векторов набора заменяется его суммой с любым другим вектором набора, умноженным на любое число:

$x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_k, \ i \ne j.$

Лемма. Элементарные преобразования не меняют линейной зависимости. Иначе говоря: наборы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_k$ либо оба линейно независимы, либо оба линейно зависимы.

Доказательство. Пусть набор $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно независим. Предположим (от противного), что набор $x_1, x_2, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_k$ линейно зависим. Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых есть хотя бы одно ненулевое, для которых

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i (x_i + \lambda x_j) + \ldots + \alpha_k x_k = 0$$

Перегруппировав члены, получаем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i + \ldots + (\alpha_j + \lambda \alpha_i) x_j + \ldots + \alpha_k x_k = 0$$

при этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, (\alpha_j + \lambda \alpha_i), \ldots, \alpha_k$ не могут все быть равными нулю. Следовательно, исходный набор $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависим: противоречие.

Вернемся к доказательству теоремы. Поскольку набор столбцов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в пространстве R^n линейно независим, то среди этих столбцов нет нулевого. Выберем в последнем столбце ненулевой элемент и без ограничения

общности можно считать, что это самый нижний элемент. Умножая последний столбец на подходящие числа и вычитая его последовательно из всех других столбцов, мы можем добиться того, чтобы последние элементы всех столбцов, кроме последнего, стали равными нулю. Таким образом производя элементарные преобразования с набором столбцов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мы привели этот набор к такому виду, что последние элементы всех столбцов, кроме последнего стали равны нулю. Согласно лемме этот новый набор столбцов линейно независим, а, следовательно, линейно независим и новый набор без последнего столбца, состоящий из k – 1 столбца. У всех этих столбцов последний элемент равен нулю, поэтому можно считать, что эти столбцы принадлежат пространству R^{n-1}. По предположению индукции

$$k - 1 \leq n - 1$$

значит $k \leq n$, что и требовалось.

Благодаря этой теореме мы можем говорить о размерности любого конечномерного векторного пространства: два конечномерных векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. Каждое векторное пространство размерности n изоморфно пространству R^n.

Пример. Пусть R^3 – векторное пространство всех столбцов длины (высоты) 3. Тогда набор трех столбцов

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

образует базис пространства R^3.

Линейные функции. Сопряженное пространство. Двойственность.

Пусть V – векторное пространство. Функция $f: V \to R$ называется *линейной*, если для любых $x, y \in V$ и $\lambda \in R$ выполнены два свойства линейности:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Почему именно 2? Потому что имеются ровно две операции линейности: сложение и умножение на число.

Пусть V – векторное пространство. Рассмотрим множество всех линейных функций f на этом пространстве. Линейные функции можно складывать и умножать на числа. Вот строгое определение:

Пусть f и g – две линейные функции. Их суммой мы назовем функцию

f + g, которая определяется формулой

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Произведением λ f назовем функцию, которая определяется формулой

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Таким образом все линейные функции на векторном пространстве V сами образуют векторное пространство, которое называется *сопряженным* или *дуальным* векторным пространством, и обозначается через V^*. Если V – конечномерное векторное пространство, то V^{**} естественно изоморфно V.

Если V – пространство столбцов, то V^* удобно представлять себе как пространство строк. Произведение строки на столбец по правилам матричного умножения совпадает с применением линейной функции к вектору.

Пусть в пространстве V задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда в пространстве V^*естественным образом можно задать базис $e^1, e^2, \ldots, e^n$ следующими формулами:

$$e^i (e_j) = \delta_{ij}$$

Этот базис в пространстве V^* называется *дуальным* (или *двойственным*, или *сопряженным* базисом).

Координатами линейной функции называются координаты ее как вектора в дуальном базисе, иначе говоря, координаты линейной функции есть ее значения на базисных векторах $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Скалярное умножение. Метрика.

Скалярным умножением на векторном пространстве V называется *билинейная* (т.е. линейная по каждому аргументу при фиксированном втором) функция s: V x V --→ R, обладающая следующими свойствами:

1. Симметричность: s(x, y) = s(y, x)
2. Невырожденность: для каждого x ≠ 0 существует y, для которого s(x, y) ≠0
3. Положительность: для любого x ≠ 0 s(x, x) > 0.

Скалярное умножение задает метрику на пространстве V в том смысле, что позволяет измерять длины векторов и углы между ними.

Скалярное умножение устанавливает изоморфизм между V и V^*. Но не любой изоморфизм между V и V^* является скалярным произведением. Векторное пространство V с заданным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Пространство R^3 всех столбцов длины (высоты) 3 является евклидовым, стандартное скалярное произведение s(x, y) определяется формулой

$$s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}) = xu + yv + zw$$

С таким скалярным произведением пространство R^3 совпадает с тем пространством, в котором мы с Вами сейчас находимся.

Скалярное умножение s, задает изоморфизм V ---→ V^*, который можно обозначить той же буквой s: V ---→ V^*. В таком представлении симметричность означает, что s = s^*. Вообще-то s^* действует из V^{**} в V^*, но V^{**} равно (более точно, естественно изоморфно) V, поэтому s и s^* имеют одинаковые области определения и значений и поэтому можно говорить об их совпадении.

Линейные преобразования

Пусть V и U – векторные пространства. Отображение A: V → U называется *линейным преобразованием* (или *линейным оператором*), если оно перестановочно с операциями линейности, т.е. для любых x, y ∈ V и λ ∈ R

$$A(x + y) = A(x) + A(y)$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Обратите внимание, что в этих равенствах речь идет о равенстве векторов, в то время как при определении линейной функции в аналогичных равенствах речь шла о равенстве чисел.

Сопряженный оператор A^* : $U^* \to V^*$ определяется так: пусть f ∈ U^*, это значит, что f: U → R – линейная функция на U. Положим по определению, что

$A^*(f) \in V^*$ - линейная функция на V, которая определяется формулой

$$A^*(f)\,(x) = f(A(x))$$

Было бы хорошим упражнением доказать, что A^* : $U^* \to V^*$ - линейный оператор.

Как видите, сопряженный или двойственный оператор действует в обратном направлении. Такова вообще природа двойственности в математике, это как отражение в зеркале, правая рука переходит в левую, стрелки, символизирующие отображения, меняют направление. Физики иногда для того, чтобы подчеркнуть двойственность между векторами и линейными функциями называют последние *ковекторами.* Иногда физиками используется также и такая терминология: векторы называют *ковариантными векторами*, а линейные функции – *контравариантными векторами*.

Пусть A : V -→ V – линейный оператор в пространстве V, и пусть в пространстве V задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Мы можем каждый вектор $A(e_i)$ представить в виде линейной комбинации:

$$A(e_i) = \alpha_{1i}\, e_1 + \alpha_{2i}\, e_2 + \ldots + \alpha_{ni}\, e_n$$

и коэффициенты α_{1i}, α_{2i}, … α_{ni} расположить в виде i – того столбца матрицы

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

Квадратные матрицы можно перемножать по правилу «строка на столбец». Если A и B – два линейных оператора V --→ V, то их композиция AB, определяемая формулой AB(x) = A(B(x)), тоже является линейным оператором и матрица оператора AB совпадает с произведением матриц оператора A и B в той же последовательности (внимание: умножение операторов, как и их матриц, некоммутативно).

Ортогональные преобразования

Пусть V – евклидово пространство. Оператор A: V → V называется *ортогональным,* если он сохраняет скалярное произведение:

$$s(A(x), A(y)) = s(x, y)$$

для любых x, y ∈ V.

Теорема. Пусть V – евклидово n-мерное пространство. Тогда в этом пространстве можно выбрать такой базис, то все вектора этого базиса попарно ортогональны между собой, а длина каждого вектора базиса равна 1.

Доказательство. Попробуйте доказать сами.

Это значит, что каждое n-мерное евклидово пространство изометрично пространству R^n со стандартной метрикой.

Ортогональные преобразования R^n ---→ R^n задаются матрицами M, для которых $MM^* = E$. Следовательно, все ортогональные преобразования

пространства R^n в себя образуют группу. Эта группа имеет стандартное обозначение O(n).

Тензоры.

Тензорами называются полилинейные функции от нескольких аргументов, которые могут принадлежать пространствам V и V^*. Более подробно:

Тензором типа (p, q) называется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q)$, в которой

$x_1, x_2, \ldots, x_p \in V$, $y^1, y^2, \ldots, y^q \in V^*$ и линейная по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Все тензоры типа *(p, q)* сами образуют линейное пространство, т.к. их можно складывать и умножать на числа. Интересно узнать размерность этого пространства, для этого нужно уметь в этом пространстве построить базис.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис пространства V, и $e^1, e^2, \ldots, e^n$ – сопряженный базис пространства V^*. Рассмотрим в качестве аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p, y^1, y^2, \ldots, y^q$ только базисные векторы и ковекторы. Поскольку на каждом из p+q мест может находиться любой из n базисных векторов (или ковекторов), то всего таких комбинаций будет n^{p+q}. Стандартный базис в пространстве всех тензоров типа *(p, q)* состоит из полилинейных функций, которые принимают значение 1 на единственной из n^{p+q} комбинаций базисных векторов и 0 на всех остальных $n^{p+q}-1$ комбинациях. Легко проверить, что это действительно базис и, следовательно, размерность пространства тензоров типа *(p, q)* равна

n^{p+q}.

С точки зрения применения в физике очень важным является такой вопрос: как меняются координаты тензора при замене базиса в пространстве V ? Нам придется подробнее рассмотреть связь базиса в пространстве V с описанным выше базисом в пространстве всех тензоров типа *(p, q).*

Введем стандартное обозначение (дельта Кронекера)

$$\delta_i^j = 1, \text{ если } i = j \text{ и } \delta_i^j = 0, \text{ если } i \neq j$$

Дельта Кронекера является другой записью единичной матрицы, у которой на диагонали стоят 1, а вне диагонали нули.

По определению сопряженного базиса $e^j(e_i) = \delta_i^j$. Иначе это равенство можно записать на языке формализма матриц

$$\begin{matrix} e^1 \\ e^2 \\ . \\ . \\ . \\ e^n \end{matrix} \quad (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}$$

Пусть в пространстве V у нас вдруг появился другой базис $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$. Переход от одного базиса к другому выражается некоторой обратимой матрицей C

$(u_1,\ u_2, \ldots, u_n) = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)\ C$

Тогда базис $u^1,\ u^2, \ldots, u^n$, сопряженный с базисом $u_1,\ u_2, \ldots, u_n$, следующим образом связан с базисом $e^1, e^2, \ldots, e^n$

$(u^1,\ u^2, \ldots, u^n) = (e^1,\ e^2,\ \ldots,\ e^n)\ C^{*-1}$

Эти формулы физики предпочитают записывать в следующем виде:

$u_i = e_k c^k{}_i$, здесь подразумевается знак суммы по k, но принято такое соглашение, если в одночлене одна и та же буква встречается один раз снизу, а другой раз сверху, то по этой букве подразумевается суммирование. Соответственно, $u^i = e^k d_k{}^i$, здесь матрица $D = \{d_k{}^i\}$ транспонирована и обратна матрице C.

Пусть $x = \xi^i u_i$ - вектор с координатами ξ^i в базисе $u_i = e_k c^k{}_i$. Тогда в базисе e_k координаты того же вектора будут $\xi^i c^k{}_i$, $x = (\xi^i c^k{}_i)\ e_k$

Пусть $y = \zeta_i u^i$ – ковектор с координатами ζ_i в дуальном базисе $u^i = e^k d_k{}^i$. Тогда в базисе e^k координаты того же вектора будут $\zeta_i d_k{}^i$, $y = (\zeta_i d_k{}^i)\ e^k$

Координаты тензора типа *(p, q)* представляют собой набор чисел ξ, у которых *p* верхних индексов и *q* нижних. При замене базиса в пространстве V координаты тензора меняются по такому правилу: каждый нижний индекс *i* требует умножения на d_k^i и суммирования по *I,* а каждый верхний индекс *j* требует умножения на c^k_j и суммирования по *j.*

Кососимметрические тензоры.

Пусть *T* – тензор типа *(p, 0),* это значит, что $T(x_1, x_2, \dots, x_p)$ – полилинейная функция p аргументов, принадлежащих пространству V. С точки зрения приложений огромную важность имеют кососимметричные тензоры, т.е. такие, которые меняют знак при перестановке любых двух элементов:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = - T(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

Все кососимметричные тензоры типа *(p, 0)* образуют линейное пространство, имеющее стандартное обозначение: $\Lambda^p V$. Размерность этого линейного пространства равна $C^p_n = n!/(p!\,(n-p)!)$, это число подмножеств мощности *p* в конечном множестве мощности *n*. Базис в пространстве $\Lambda^p V$ состоит из полилинейных кососимметрических функций, стандартно обозначаемых

$e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^d$, в которых ровно p попарно разных базисных элемента пространства V^*, и определяемых так:

$e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^d (e_a, e_b, \dots, e_d) = 1$, здесь аргументы $e_a, e_b, \dots, e_d$ являются базисными элементами пространства V, идущими ровно в той же той же функции равно +1 или -1 в зависимости от того четная или нечетная перестановка. При всех остальных наборах базисных элементов значение функции равно 0.

Если $A: V \dashrightarrow V$ – произвольный линейный оператор, то он *индуцирует* линейный оператор $\Lambda^p A : \Lambda^p V \dashrightarrow \Lambda^p V$ очевидным образом. Если взять *p=n,* то поскольку пространство $\Lambda^n V$ одномерно, то оператор $\Lambda^n A$ является просто числом. Это число называется определителем преобразования *A*.

Если φ – кососимметрическая функция, то ее координаты в описанном выше базисе $\varphi_{ab\dots d}$ представляют собой набор чисел с p индексами, каждый из которых принимает значения от 1 до n. При этом никакие два индекса не могут быть равны (или можно еще сказать, что если какие-то два индекса

равны, то этот коэффициент обращается в 0), и при перестановке любых двух индексов координата меняет знак (но сохраняет модуль).

Электромагнитное поле.

Явления природы происходят в пространстве R^3, но они еще зависят от времени, поэтому для описания явлений природы в динамике нам нужно к трем пространственным координатам добавить еще и временную. Но при этом возникает одно неудобство: время измеряется в других единицах, т.е. не в метрах, а в секундах. Это затрудняет совершать произвольные преобразования координат (возможны лишь элементарные преобразования). Поэтому введем единицу времени «метр» - это промежуток времени, за который свет пробегает расстояние 1 метр, примерно $(3*10)^{-8}$ сек. Временная ось с такой единицей измерения времени становится неотличима от пространственных осей, и мы просто можем рассматривать явления природы в пространстве R^4.

Электромагнитное поле (в одной точке) представляет собой элемент из пространства $\Lambda^2 R^4$ кососимметрических тензоров типа (2, 0). Это пространство 6-мерно, электромагнитное поле определяется 6 параметрами φ_{ij}, здесь $0 \le I, j \le 3$.

На уроках физики в школе нам говорят, что имеется электрическое поле E_x, E_y, E_z и магнитное поле H_x, H_y, H_z. Если не переходить к движущейся системе координат, то такое представление корректно, т.е. у нас имеется два независимых векторных поля. Но при переходе к движущейся системе координат эти два поля «перемешиваются», т.е. переходят одно в другое. В самом деле, электрическое поле создается зарядами, а магнитное – движущимися зарядами. Но вопрос о том, движется заряд или покоится зависит от системы координат, в одной системе координат заряд может покоиться, а в другой – двигаться. Это значит, что в той системе координат, в которой заряд покоится, имеется только электрическое поле, а магнитного нет, но стоит перейти в движущуюся систему координат, в которой тот же заряд будет двигаться, то мы увидим магнитное поле. Поэтому представление об электромагнитном поле, как о двух отдельных векторных полях не является инвариантным с точки зрения замены системы координат. Для физиков теоретиков, занимающихся классификацией полей и

элементарных частиц, неинвариантное представление неприемлемо. Представление же электромагнитного поля как кососимметрического тензора типа (2, 0) в пространстве R^4 инвариантно. Под электромагнитным полем в этой лекции я понимаю поле в одной точке 4-мерного пространства R^4. В реальности поле задано в целой области пространства и времени, уравнения, которые определяют зависимость поля от точки в R^4, называются уравнениями Максвелла.

Здесь не место объяснять это подробнее, но этот факт является основным элементом специальной теории относительности.

Общая теория относительности, или, как ее еще называют, теория гравитации, основана на том факте, что инвариантным представлением гравитационного поля является метрика (т.е. скалярное умножене) в пространстве R^4.

Топология метрических пространств

Пусть A – множество. Метрикой на множестве A называется функция

$$\rho: A \times A \rightarrow R$$

расстояния: ρ(a, b) – «расстояние между точками (элементами) a и b. Это значит, что

1. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$
2. $\rho(a, b) \geq 0$, причем $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$
3. имеет место «неравенство треугольника»:

$$\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Профессиональные математики обычно эти свойства называют «аксиомами», а то, что мы только что определили, называется «аксиоматическим определением метрики».

Примеры.

1. Пространство, в котором мы живем, является метрическим. В самом деле, благодаря наличию у нас «линейки», которую мы можем прикладывать к любым двум точкам, определено расстояние между этими точками и свойства 1. – 3. при этом очевидно выполнены.

2. Множество вещественных чисел станет метрическим пространством, если для любых двух чисел x и y положить $\rho(x, y) = |x - y|$.
3. Пусть A – множество троек вещественных чисел (x, y, z). Введем на этом множестве расстояние между любыми двумя тройками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) по формуле:

$$\rho((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \mathrm{sqrt}((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2)$$

   Фактически это метрическое пространство изометрически изоморфно пространству п. 1.

Метрика – важнейшее понятие математики, понятие метрики встречается в самых разных областях математики в разных вариантах. Мы сейчас покажем, как метрика используется для определения непрерывности.

Пусть A и B – два метрических пространства и пусть f: A -> B отображение одного из них в другое.

Определение. Отображение f: A -> B называется непрерывным в точке a ∈ A, если для любого положительного числа ε существует положительное δ, такое, что для любой точки *x* ∈ *A* такой, что $\rho(a, x) < \delta$ выполнено неравенство $\rho(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Отображение f: A -> B называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке метрического пространства A.